数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 70-76

ネヴァンリンナ理論とイロハ(*abc*-)予想

東大・数理　野口潤次郎 (Junjiro Noguchi)
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo

1　序–動機

次の S. Lang 予想から始めよう.

予想 1.1 (**Lang 予想** '74) K を代数体 ($/\mathbf{Q}$ 上有限次) として, V/K をその上で定義された射影代数多様体とする. ある埋込 $K \hookrightarrow \mathbf{C}$ にたいし, $V/\mathbf{C}$ が小林双曲的とする. このとき, V の K-有理点集合 $V(K)$ は有限集合である.

関数体上の類似が成立する. 特に, 固定したコンパクト複素多様体から小林双曲的多様体への全射は高々有限個である.

一般次元の場合, 関数体上の類似の定式化には, 小林双曲性が代数幾何的表現とかけはなれている為, 正準的なものはないが, 妥当な類似は成立する事が知られている (野口 '81–'92). 本来の予想も $\dim V = 1$, V がアーベル多様体の部分多様体の場合 (Faltings '83, '91), V が準アーベル多様体の部分多様体の場合 (Vojta '96) は証明されている.

本稿では, 小林双曲性, 有理点の有限性, Nevanlinna 理論, 有理近似論 (Diophantus 近似論), それらの関数体上での理論, 等々の間の理論的, 有機的類似に着目する. 図式的には $\Rightarrow$ を応用の向きを表すとして次のようになる. 関数体上の理論は, ちょうど中間に位置するとみられる.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Nevanlinna 理論} & & \Longrightarrow & & \text{小林双曲性} \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
\Downarrow & & \text{関数体上の理論} & & \Downarrow \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
\text{Vojta 予想} & & \Longrightarrow & & \text{有限性定理 } |V(K)| < \infty
\end{array}
$$

これに密接に関係するのが, Masser-Oesterlé による *abc*-Conjecture (ここでは, 和訳として "イロハ予想" と呼ぶ) である.

予想 1.2 (**イロハ予想**) 任意の $\epsilon > 0$ にたいしある定数 $C(\epsilon) > 0$ が存在して, $a, b, c \in \mathbf{Z}$ を互いに素な整数で, $a + b + c = 0$ をみたすならば, 常に

$$
\max\{|a|, |b|, |c|\} \leqq C(\epsilon) \left(\prod_{\text{prime } p | (abc)} p \right)^{1+\epsilon}. \tag{1.3}
$$

$x = (x_0, x_1)$ を $\mathbf{P}^1$ の同次座標として, その $\mathbf{Z}$ 上の線形型式 $F(x)$ にたいし次のように "打ち切り個数関数" を定める.

$$
N_k(x, F) = \sum_{\text{prime } p | F(x)} \min\{k, \mathrm{ord}_p F(x)\} \log p, \quad 1 \leqq k \leqq \infty,
$$
$$
N(x, F) = N_\infty(x, F).
$$

本研究は, 日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (A)(1), 13304009 の補助を受けた.

三つの一般の位置にある線形型式

$$F_1 = x_0, \quad F_2 = x_1, \quad F_3 = -x_0 - x_1$$

を考える．(1.3) での $x = (a, b) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ の射影的（対数的）高さを $\mathrm{ht}(x) = \log\max\{|a|, |b|\}$ とおくと，(1.3) は次の形の評価式と同値である．

$$(1.4) \qquad (1-\epsilon)\mathrm{ht}(x) \leqq \sum_{i=1}^{3} N_1(x, F_i) + C(\epsilon).$$

これは，高さの上からの評価をしている．近似の限度 (Diophantus 近似) を表す式に変形するために，Nevanlinna 理論に倣って近似関数 $m(x, F)$ を次で定める．

$$m(x, F) = \log\frac{\max\{|a|, |b|\}}{|F(a, b)|}, \qquad x = (a, b).$$

ユークリッド的に $|F(x)|$ が小さくなると，$m(x, F)$ は $+\infty$ に発散する．更に，全ての素点 p での p-進的な 0 近似の度合いを測る為に，

$$N^k(x, F) = N(x, F) - N_k(x, F)$$

を導入する．これは，各素点 p で $\mathrm{ord}_p F(x)$ が大きくなれば，∞ に発散するものであるが，p-進的には $F(x)$ は益々0 に一様に近付く．(1.4) は次の様に書き換えられる．

$$(1.5) \qquad \sum_{i=1}^{3} m(x, F_i) + N^1(x, F_i) \leqq (2+\epsilon)\mathrm{ht}(x) + C(\epsilon).$$

イロハ予想の定式化は，代数体 K 上でも同様の式になる．そのとき，(1.5) の左辺第二項のないものが，Roth の定理である：即ち，

$$(1.6) \qquad \sum_{i=1}^{3} m(x, F_i) \leqq (2+\epsilon)\mathrm{ht}(x) + C(\epsilon).$$

これからも分かるように，イロハ予想は大変強い主張をしていることになる．次の節で分かるように，イロハ予想は有理型関数にたいする Nevanlinna の第二主要定理の類似である．

以下では，このような視点から観るとき，Diophantus 近似論，値分布論，関数体上の有理近似論でなにが問題となり，どこまで分かっているかを論ずる．

2 線形型式について

任意の代数体 K をとり，止める．Roth の定理 (1.6) の多変数版として，次の定理が知られている．

定理 2.1 $F_i, 1 \leqq i \leqq q$, を $\mathbf{P}^n_K$ 上の一般の位置にある線形型式とする．任意の $\epsilon > 0$ にたいし，$\mathbf{P}^n$ の真線形部分空間の有限和 $E(\epsilon)$ と正定数 $C(\epsilon)$ が存在して，$x \in \mathbf{P}^n(K) \setminus E(\epsilon)$ にたいし

$$\sum_{i=1}^{q} m(x, F_i) \leqq (n+1+\epsilon)\mathrm{ht}(x) + C(\epsilon).$$

従って，イロハ予想の次のよな多変数版が考えられる．

予想 2.2 (イロハ … 予想， 野口 '95, Vojta '98) 定理 2.1 と同じ条件下で，

$$\sum_{i=1}^{q} m(x, F_i) + N^n(x, F_i) \leqq (n+1+\epsilon)\mathrm{ht}(x) + C(\epsilon),$$
$$\forall x \in \mathbf{P}^n(K) \setminus E(\epsilon).$$

この予想は，もちろん現在未解決であるが，値分布理論では古典的 Nevanlinna-Cartan ('25-'33) 理論があり，イロハ … 予想はその類似と考えられる．以下に，Nochka '83 により改良された結果を述べる．

定理 2.3 $\mathbf{C}$ 上で，$F_i, 1 \leqq i \leqq q$, を $\mathbf{P}^n$ 上の一般の位置にある線形型式とする．任意の整正則曲線 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ にたいしその像を含む最小の線形部分空間の次元を l とすると，

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, f, F_i) + N^l(r, f, F_i) \leqq (2n - l + 1)T(r, f) + S(r, f).$$

さて上で現れた種々の量は，$f = (f_0, \ldots, f_n)$ を共通零点のない整関数 f_j による既約表現とするとき，次で定まる．

$$\begin{aligned}
T(r, f) &= \int_{|z|=r} \log \max_j \{|f_j(z)|\} \frac{d\theta}{2\pi} - \log \max_j \{|f_j(0)|\}, \\
m(r, f, F_i) &= \int_{|z|=r} \log \frac{\max_j \{|f_j(z)|\}}{|F_i(f_0(z), \ldots, f_n(z))|} \frac{d\theta}{2\pi}, \\
N_k(r, f, F_i) &= \sum_{0<|z|<r} \min\{k, \mathrm{ord}_z F_i \circ f\} \log \frac{r}{|z|} + \min\{k, \mathrm{ord}_0 F_i \circ f\} \log r, \\
N(r, f, F_i) &= N_\infty(r, f, F_i), \\
N^k(r, f, F_i) &= N(r, f, F_i) - N_k(r, f, F_i), \\
S(r, f) &= O(\log T(r, f) + \log r) \,\|_E.
\end{aligned}$$

ここで，最後のものは，$E \subset (0, \infty)$ は長さ有限な Borel 可測集合で，述べられた評価式が $r \notin E, r \to \infty$ にたいし成立することを意味している．$T(r, f)$ は，Cartan 位数関数と呼ばれ，$\mathrm{ht}(x)$ に対応する．他のものの対応は記法より容易に分かるであろう．

この結果の関数体上の類似については，多くの研究者の結果がある (Mason, Voloch, Brownawell-Masser, J. Wang, Á. Pintér, 野口 ...)．以下は，野口 '97 による．

$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の Fubini-Study 計量型式 ω を

$$\int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \omega^n = 1$$

と正規化する．B をコンパクトリーマン面とし，正則射 $x: B \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ にたいし，

$$\mathrm{ht}(x) = \int_B x^* \omega$$

とする．$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の線形型式 $F, F \circ x \not\equiv 0$, にたいして

$$N_k(x,F) = \sum_{a \in B} \min\{k, \mathrm{ord}_a F \circ x\},$$
$$N(x,F) = N_\infty(x,F) = \mathrm{ht}(x)$$
$$N^k(x,F) = N(x,F) - N_k(x,F).$$

注． B はコンパクトなので，境界でのユークリッド的な量 $m(x,F)$ に相当するものはない．

定理 2.4 B の種数を g とする．$F_i, 1 \leqq i \leqq q$, を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の一般の位置にある線形型式とする．任意の $x : B \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ にたいしその像を含む最小の線形部分空間の次元を l とすると，

$$\sum_{i=1}^{q} N^l(x,F_i) \leqq (2n-l+1)\mathrm{ht}(x) + C(l,n,g).$$

但し

$$C(l,n,g) = \begin{cases} -l(n+1), & g = 0 \\ l(2n-l+1)(g-1), & g \geqq 1. \end{cases}$$

特に $l = n$ ならば，

$$\sum_{i=1}^{q} N^n(x,F_i) \leqq (n+1)\mathrm{ht}(x) + n(n+1)(g-1).$$

これは，やはり関数体上で，有理近似には限度があることを意味している．ただし，ここでは F_i 等の係数は定数である．Diophantus 近似論の精神からすると，係数と変数等は同じ体，ここでは関数体にとられるべきである．このような観点からの結果もあり，準備中である (証明抜きの叙述であるが，[No02a] を参照)．

3　準アーベル多様体の場合

準アーベル多様体での整正則曲線の値分布と有理点分布については，以下のことが知られている．

定理 3.1 (i)(log-Bloch-落合, Bloch '26, 落合 '77, 川又 '80, 野口 '81) A を準アーベル多様体，X をその部分多様体とする．任意の整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to X$ の像のザリスキー閉包は，準アーベル部分多様体の平行移動で X に含まれるものに一致する．

(ii)(Lang 予想，Siu-Yeung '96, 野口 '98) D を準アーベル多様体 A 内の正係数因子で，$\mathrm{St}(D) = \{a \in A; a + D = D\}$ は有限であるものとする．任意の整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ のザリスキー閉包は，A の準アーベル部分多様体の平行移動 X で，$X \cap D = \emptyset$ をみたすものに一致する．

有理点の分布については，次の定理が対応するものである．

定理 3.2 (Faltings '83, '91, Vojta '96) (i) A, X を代数体 K 上の準アーベル多様体とその部分多様体とする．有理点集合 $X(K)$ のザリスキー閉包は，A の準アーベル部分多様体の平行移動で X に含まれるものの有限和に一致する．

(ii) A, D を代数体 K 上の準アーベル多様体とその正係数因子で，$\mathrm{St}(D)$ が有限であるものとする．このとき，$A \setminus D$ の D-整数点集合は，A の準アーベル部分多様体の平行移動で D と交わりを持たないものの有限和に一致する．

従って，これらの定理の "イロハ予想" 版が当然問題に成る．整正則曲線について言えば，それは "第二主要定理" を証明することに他ならず，最近次のような結果を得た．

定理 3.3 (野口-Winkelmann-山ノ井 '01, '02) A をアーベル多様体，D をその正係数因子とする．このとき，ある自然数 $k = k(\rho_f, D)$ ($\rho_f < \infty$ のとき), $k = k(f, D)$ ($\rho_f = \infty$ のとき) が存在して，任意の整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ にたいして

$$m(r, f, D) + N^k(r, f, D) \leqq S(r, f). \tag{3.4}$$

注． (i) 準アーベル多様体の場合も成立するが，叙述がちょっと複雑になる（[NWY02] を参照）．

(ii) この定理については，Siu-Yeung '97 の論文もあるが，その証明には，鍵になる補題の主張そのものが正しくないという欠陥がある（詳しくは [NWY02] を参照）．

(iii) McQuillan '96 では，Vojta の方法で次のような式を扱っている．

$$m(r, f, D) \leqq \epsilon T(r, f) \,||.$$

さて，(3.4) は，$S(r, f)$ による評価では最良なのであるが，最近 山ノ井は次の結果を得た．

定理 3.5 (山ノ井 [Ya01]) A をアーベル多様体，D をその正係数因子とする．任意のザリスキー非退化な整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ にたいして，$\epsilon > 0$ を任意にとると，

$$m(r, f, D) + N^1(r, f, D) \leqq \epsilon T(r, f) \,||. \tag{3.6}$$

注． (3.6) で $\epsilon T(r, f)$ を $S(r, f)$ にはできない例がある．しかし，N^1 という評価はすばらしく，応用が期待される．

これ等から，次が予想される．

予想 3.7 (アーベル多様体上のイロハ予想) A, D を代数体 K 上定義された（準）アーベル多様体で，D をその豊富因子とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ にたいして定数 $C(\epsilon) > 0$ が存在して，

$$m(x, D) + N^1(x, D) \leqq \epsilon \mathrm{ht}(x) + C(\epsilon).$$

この種の予想や定理の関数体版について，以下のような結果がある．B をコンパクトリーマン面，$F = \mathbf{C}(B)$ をその有理関数体，$g = g(B)$ をその種数，とする．

定理 3.8 (Buium '94, '98) (i) A を F 上のアーベル多様体で，$F/\mathbf{C}$-跡が 0 とする．D を A の豊富因子とすると，ある定数 $C_1, C_2 > 0$ があって．

$$\mathrm{ht}(x) \leqq C_1 N_1(x, D) + C_2. \tag{3.9}$$

(ii) A を $\mathbf{C}$ 上のアーベル多様体，D を小林双曲的因子とする．ある定数 $C(B, D, A) > 0$ があって，任意の正則射 $x : B \to A, x(B) \not\subset D$, にたいし

$$\mathrm{ord}_v x^* D \leqq C(B, D, A), \qquad \forall v \in B.$$

予想 3.10 (3.9) で，定理3.5からすれば，次の式が予測される．

$$(1-\epsilon)\mathrm{ht}(x) \leqq N_1(x,D) + C(\epsilon).$$

Buiumの証明は，Kolchinの微分代数体の理論を使うもので，我々にはちょっと馴染みのないものである．普通の代数幾何的証明と，Dの仮定を "豊富" ぐらいに落とすことが望まれていた (Buium)．我々は，今準備中の論文で，定理3.3で本質的に役立ったジェット束の理論を用いることに次のような結果を得た．

定理 3.11 (野口-Winkelmann '02) A, Dを$\mathbf{C}$上のn次元アーベル多様体とその上の豊富因子とする．ある定数$C(g, D^n, n) > 0$があって$x : B \to A, x(B) \not\subset D$, にたいし

$$\mathrm{ord}_v x^* D \leqq C(g, D^n, n), \qquad \forall v \in B.$$

この定理の応用として次のような有限性定理を証明できる．

定理 3.12 (野口-Winkelmann '02) A, Dを定理3.11と同じとする．更に，正則射$x : B \to D$は定射しかないと仮定する．有限部分集合$S \subset B$を止める．すると，Fの(S, D)-整数点集合$\{x : B \to A, x^{-1}D \subset S\}$は有限である．

4 単独Diophantus方程式

$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$内の次数の高い一般の超曲面Xは，小林双曲的であろうという予想がある（小林予想 '70)．これと初めのLang予想1.1を繋げるとつぎの予想が立つ．

予想 4.1 $\mathbf{P}^n$内の次数の高い一般の超局面Xを$\mathbf{Q}$上与えると，どんな代数体Kをとっても，$X(K)$は有限である．

かかるXは，単独の$(n+1)$-変数同次多項式

$$P(w_0, \ldots, w_n) = 0$$

で与えられるので，不定方程式としては最も単純なものと言える．

任意の$n > 1$について，小林双曲的$X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$の存在は示されている (増田-野口 '96)．そこで構成された例$X \subset \mathbf{P}_\mathbf{Q}$について，"$S$-単点" は有限個しかないことも証明された (野口 '97)．ただし，SはKの全ての無限素点を含む有限個の素点から成る集合である．

従って，予想4.1が成立する$X \subset \mathbf{P}_\mathbf{Q}$が存在するや否やを問うことは自然な問題である．ここに，城崎 '98による興味深い小林双曲的$X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$の例がある．次のように置く．$d, e \in \mathbf{N}$は互いに素で次をみたす．

$$d > 2e + 8.$$

$$P(w_0, w_1) = w_0^d + w_1^d + w_0^e w_1^{d-e}$$

と定め，帰納的に

$$P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1),$$
$$P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), \ldots, P(w_{n-1}, w_n)), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

と定める．P_n は次数 d^n の同次多項式である．$e \geqq 2$ とすると，

$$X = \{P_n(w_0, w_1, \dots, w_n) = 0\} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \tag{4.2}$$

は小林双曲的である (城崎 '98).

定理 4.3 (野口 [No02b]) X を (4.2) で，$e \geqq 2$ として定義する．すると，任意の代数体 K にたいし $X(K)$ は有限である．

参考文献

[Mc96] McQuillan, M., A dynamical counterpart to Faltings' "Diophantine approximation on Abelian varieties", I.H.E.S. preprint, 1996.

[No81] Noguchi, J., Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[No96] Noguchi, J., On Nevanlinna's second main theorem, Geometric Complex Analysis, Proc. the Third International Research Institute, Math. Soc. Japan, Hayama, 1995, pp. 489-503, World Scientific, Singapore, 1996.

[No98] Noguchi, J., On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[No02a] Some results in view of Nevanlinna theory, preprint UTMS 2001-24, in Number Theoretic Methods-Future Trends, China-Japan Seminar 2001, Eds. S. Kanemitsu and Chaohua Jia, Kluwer Acad. Publ., 2002 (in press).

[No02b] Noguchi, J., An arithmetic property of Shirosaki's hyperbolic projective hypersurface, preprint.

[NW99] J. Noguchi and J. Winkelmann, Holomorphic curves and integral points off divisors, preprint UTMS 99-6, math/9902014, 1999, to appear in Math. Z.

[NWY00] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[NWY02] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, preprint UTMS 99-49, math/ 9912086, 1999, to appear in Acta Math.

[SiY97] Siu, Y.-T. and Yeung, S.-K., Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degrees, Amer. J. Math. **119** (1997), 1139-1172.

[Ya01] Yamanoi, K., Holomorphic curves in Abelian varieties and intersections with higher codimensional subvarieties, preprint, 2001.

注．プレプリントシリーズ UTMS は，'01 年分より http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/ から落とせます．文中で引用した文献で上にないものは，[No02a] の論文にある文献を適宜参照願います．